

ISMAEL GUTIÉRREZ GARCÍA

# Matemáticas para informática



**ECOE**  
EDICIONES

 **EDICIONES  
UNINORTE**

ISMAEL GUTIÉRREZ GARCÍA, Dr. rer. nat.  
Es Licenciado en Matemáticas y Física  
de la Universidad del Atlántico.  
Magister en Matemáticas de la  
Universidad del Valle y Doctor en  
Matemáticas de la Universidad  
Johannes Gutenberg de Mainz  
(Alemania). Coautor del libro  
*Una introducción a la criptografía de clave  
pública* (Ediciones Uninorte, 2009).  
Actualmente es profesor asociado de la  
Universidad del Norte (Barranquilla -  
Colombia).

# Matemáticas para informática

Ismael Gutiérrez García



Barranquilla, Colombia

---

# Índice general

<b>I</b>	<b>Lógica Matemática</b>	<b>1</b>
<b>1.</b>	<b>Cálculo proposicional</b>	<b>3</b>
1.1.	Un poco de historia . . . . .	4
1.2.	Sintaxis . . . . .	12
1.2.1.	Algoritmo de decisión I . . . . .	18
1.2.2.	Unicidad en la escritura de una fórmula . . . . .	19
1.2.3.	Recursividad en fórmulas proposicionales . . . . .	22
1.3.	Notación libre de paréntesis o polaca . . . . .	29
1.3.1.	Algoritmo de decisión II . . . . .	32
1.4.	Un sistema deductivo . . . . .	35
1.5.	Semántica . . . . .	42
1.5.1.	Equivalencias y el principio de sustitución . . . . .	53
1.5.2.	Formas normales . . . . .	58
1.6.	Ejercicios . . . . .	64
<b>2.</b>	<b>Introducción a la lógica de primer orden</b>	<b>71</b>
2.1.	Sintaxis . . . . .	72
2.1.1.	L-términos . . . . .	73
2.1.2.	L-fórmulas . . . . .	78
2.2.	Semántica . . . . .	84

2.2.1.	L-estructuras y subestructuras . . . . .	84
2.2.2.	Homomorfismos . . . . .	86
2.2.3.	La relación de satisfacción . . . . .	88
2.2.4.	Validez universal . . . . .	94
2.3.	El teorema de completitud de Gödel . . . . .	99
2.4.	Ejercicios . . . . .	106
 <b>II Teoría de Conjuntos</b>		<b>109</b>
 <b>3. El sistema axiomático ZF</b>		<b>111</b>
3.1.	Preliminares y primeros axiomas . . . . .	112
3.2.	Conjunto potencia y el producto cartesiano . . . . .	128
3.3.	Relaciones . . . . .	134
3.3.1.	Relaciones de equivalencia . . . . .	146
3.4.	Funciones . . . . .	150
3.5.	Conjuntos parcialmente ordenados . . . . .	157
3.5.1.	Relaciones de orden . . . . .	157
3.5.2.	Conjuntos bien ordenados . . . . .	165
3.6.	Los números naturales . . . . .	168
3.7.	Ejercicios . . . . .	174
 <b>Bibliografía &amp; referencias</b>		<b>181</b>

---

# Prólogo

El presente libro tiene su origen en los cursos de Matemáticas Discretas y de Lógica Matemática ofrecidos por el autor durante los últimos años en los programas de Ingeniería de Sistemas y Matemáticas, respectivamente, en la Universidad del Norte.

En el contenido de la obra se destacan dos partes bien diferenciadas: la Lógica Matemática y la Teoría de Conjuntos. En la primera parte se presentan dos capítulos: El cálculo proposicional y Una introducción a la Lógica de primer orden. En el primer capítulo se presentan la sintaxis y la semántica para el cálculo proposicional, donde el principal resultado es el teorema de completitud, es decir, se demuestra la equivalencia entre fórmulas demostrables y tautologías. En el segundo capítulo se introducen los lenguajes de primer orden y se demuestra, solo en una dirección, el teorema de completitud de Gödel. La segunda parte del texto está dedicada a la presentación del sistema axiomático de Zermelo-Fränkel para la teoría de conjuntos. Al final del capítulo se presentan los números naturales y el principio de inducción.

Otro aspecto relevante de la presente publicación es la elaboración del *software* educativo MaXI, que anexamos como un producto visible del proyecto de investigación “Dos tópicos en matemáticas discretas”, financiado por la Universidad del Norte en la convocatoria interna del período 2008 - 2009.

El objetivo de esta herramienta pedagógica es ayudar en el proceso de aprendizaje de los diferentes conceptos presentados en el aula de clases. Para la elaboración, diagramación y programación de los diferentes algoritmos involucrados en el *software* se vincularon al proyecto en calidad de jóvenes investigadores los ingenieros de sistemas Luis Carlos Lombana, Alonso García y el ingeniero electrónico Darwin Villar.

En este punto es preciso agradecer a la Dirección de Investigación y Proyectos de la Universidad del Norte por el apoyo durante la ejecución del proyecto

de investigación, a Ediciones Uninorte, al Departamento de Matemáticas, a Luis Lombana por su dedicación, esfuerzo científico y excelente trabajo durante la coordinación del Grupo de Jóvenes Investigadores, a Darwin Villar por la lectura del manuscrito y sus valiosas sugerencias, a Alonso García por su apoyo constante.

**Parte I**

**Lógica Matemática**

---

---

# Capítulo 1

---

## Cálculo proposicional

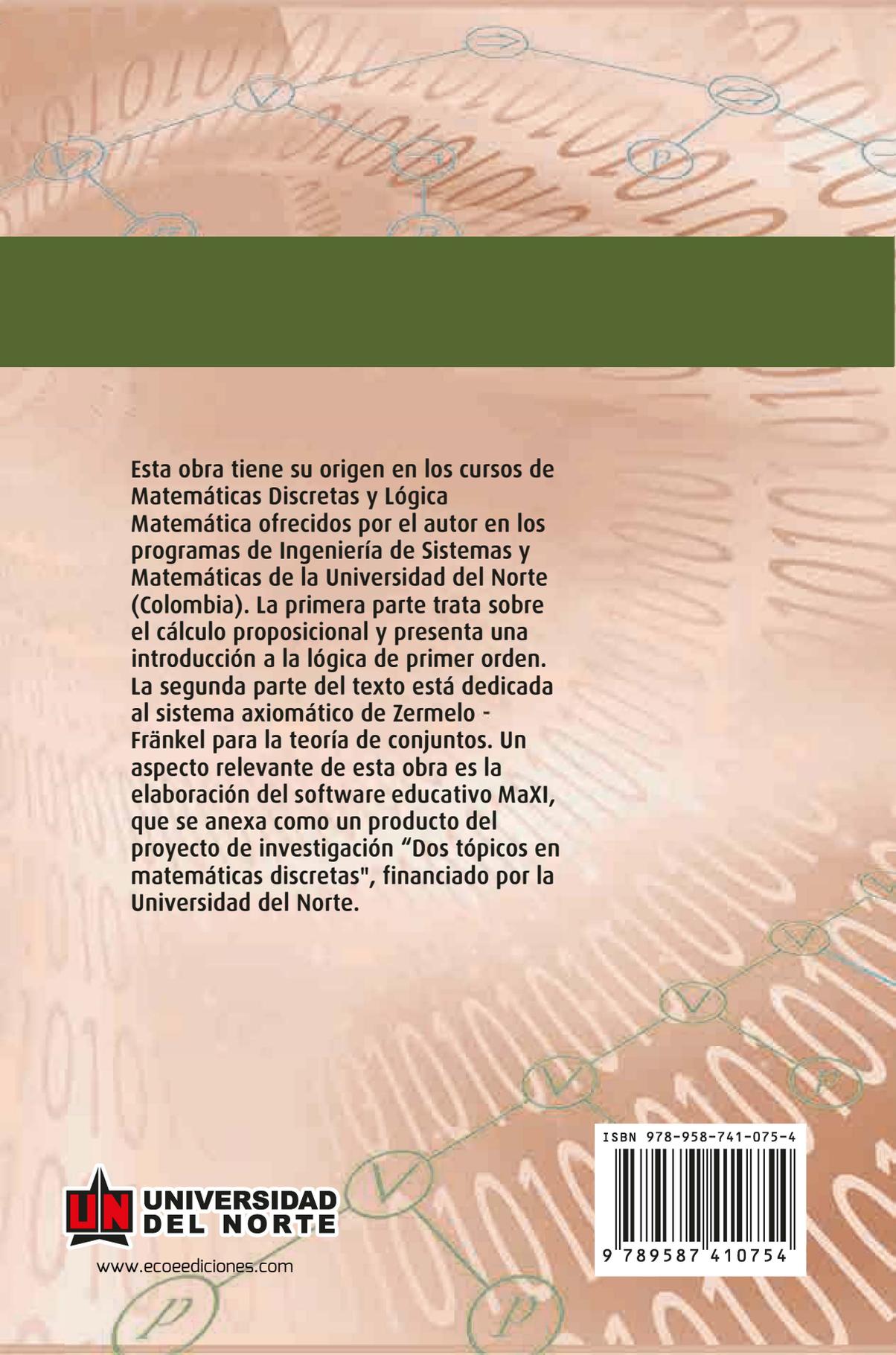
### Contenido

---

<b>1.1. Un poco de historia</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>1.2. Sintaxis</b> . . . . .	<b>12</b>
1.2.1. Algoritmo de decisión I . . . . .	18
1.2.2. Unicidad en la escritura de una fórmula . . . . .	19
1.2.3. Recursividad en fórmulas proposicionales . . . . .	22
<b>1.3. Notación libre de paréntesis o polaca</b> . . . . .	<b>29</b>
1.3.1. Algoritmo de decisión II . . . . .	32
<b>1.4. Un sistema deductivo</b> . . . . .	<b>35</b>
<b>1.5. Semántica</b> . . . . .	<b>42</b>
1.5.1. Equivalencias y el principio de sustitución . . . . .	53
1.5.2. Formas normales . . . . .	58
<b>1.6. Ejercicios</b> . . . . .	<b>64</b>

---

En el primer capítulo abordamos el cálculo proposicional. Inicialmente presentamos algunos aspectos históricos de la misma y posteriormente nos centramos en dos tópicos centrales, la sintaxis y la semántica, parte en donde se destacan la demostración del teorema de completitud para el cálculo proposicional y las formas normales de una fórmula proposicional.



Esta obra tiene su origen en los cursos de Matemáticas Discretas y Lógica Matemática ofrecidos por el autor en los programas de Ingeniería de Sistemas y Matemáticas de la Universidad del Norte (Colombia). La primera parte trata sobre el cálculo proposicional y presenta una introducción a la lógica de primer orden. La segunda parte del texto está dedicada al sistema axiomático de Zermelo - Fränkel para la teoría de conjuntos. Un aspecto relevante de esta obra es la elaboración del software educativo MaXI, que se anexa como un producto del proyecto de investigación "Dos tópicos en matemáticas discretas", financiado por la Universidad del Norte.



[www.ecoediciones.com](http://www.ecoediciones.com)

ISBN 978-958-741-075-4



9 789587 410754