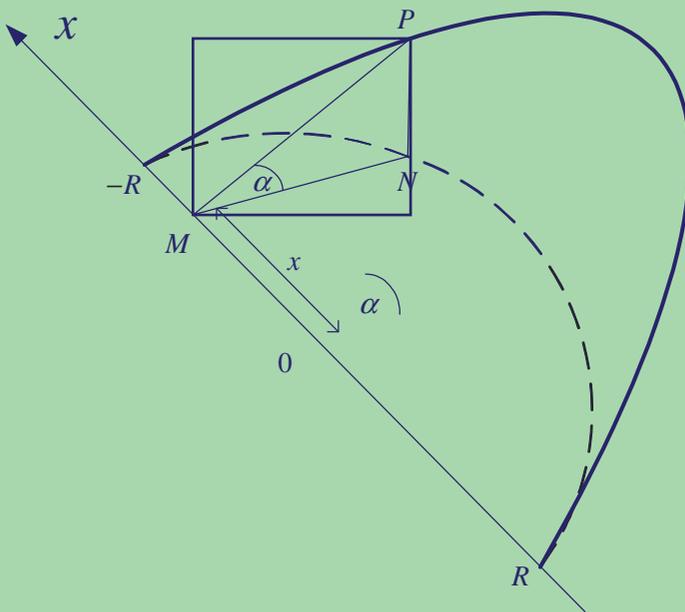


Matemáticas conceptos previos al cálculo

Aplicaciones a ingeniería y ciencias económicas



ECO
EDICIONES

Francisco Soler Fajardo
Lucio Rojas Cortés
Luis Enrique Rojas Cárdenas

FRANCISCO SOLER FAJARDO

Especialista en Matemática Aplicada (Universidad Sergio Arboleda, Bogotá); Licenciado en Matemática (Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá); Diplomado en Tecnologías Aplicadas a la Enseñanza Virtual de la Matemática (Universidad Sergio Arboleda, Bogotá). Vinculado durante 36 años a la enseñanza de la matemática en universidades de Bogotá. Además de este libro tiene publicados: Fundamentos de Matemática, Cálculo con Aplicaciones, Álgebra y Programación Lineal con Aplicaciones a Ciencias Administrativas, Contables y Financieras; Fundamentos de Cálculo con Aplicaciones a Ciencias Económicas, Cálculo Diferencial con Aplicaciones a Ciencias Económicas, Cálculo Integral con Aplicaciones a Ciencias Económicas y Matemática Básica con una Introducción al Cálculo.
e-mail: fsolerf@gmail.com

LUCIO ROJAS CORTÉS

Magister en Matemática Aplicada (Universidad EAFIT de Medellín) especialización en Gerencia de Costos (Univ. Central), Licenciado en Matemáticas (Univ. Distrital Francisco José de Caldas), fue docente de matemáticas en las Universidades: Andes, Javeriana, Libre, Manuela Beltrán y UNAD. Vinculado actualmente en las Universidades; Militar Nueva Granada y Central. Coautor del libro Álgebra Lineal y Programación Lineal (Editorial ECOE), Introducción al Cálculo (Editado por la Universidad Central), Matemáticas Básicas Nivelación (Editado por la Universidad Militar Nueva Granada) y Precálculo (Editado por la Universidad Militar Nueva Granada), además tiene publicados varios artículos en la revista de ingeniería de la Universidad Militar Nueva Granada.
e-mail: lucio.rojas@unimilitar.edu.co,
lrojasc1@ucentral.edu.co

LUIS ENRIQUE ROJAS CÁRDENAS

Magister en Evaluación en Educación (Univ. Santo Tomás), Licenciado en Matemáticas (Univ. Distrital Francisco José de Caldas), fue docente de matemáticas en las Universidades: Javeriana, Pedagógica Nacional, Salle, Sergio Arboleda, Libre y Konrad Lorenz. Vinculado actualmente en las Universidades; Militar Nueva Granada y Central. Coautor del texto Matemáticas Básicas Nivelación (Editado por la Universidad Militar Nueva Granada) y Precálculo (Editado por la Universidad Militar Nueva Granada). Además es autor de varios artículos publicados en la revista de ingeniería de la Universidad Militar Nueva Granada y ha realizado algunas ponencias a nivel nacional e internacional sobre Evaluación por competencias en Educación Superior.
e-mail: luis.rojas@unimilitar.edu.co,
doctoreducationlerc@gmail.com

“MATEMÁTICAS”

CONCEPTOS PREVIOS AL CÁLCULO
con aplicaciones a ingeniería
y ciencias económicas

Francisco Soler Fajardo,
Lucio Rojas Cortés
Luis Enrique Rojas Cárdenas.

ECOE
EDICIONES



Colombia • Bolivia • Chile • Costa Rica • Ecuador • El Salvador,
Guatemala • México • Panamá • Paraguay • Perú
República Dominicana • Venezuela.

Tabla de contenido

Capítulo 1	
El conjunto de los números reales	1
Objetivos	1
El conjunto de los números naturales	2
Fracciones	3
Fracciones decimales	4
Otros conjuntos numéricos	4
El conjunto de los números racionales	6
Densidad de los racionales	7
Números irracionales	7
Conjunto de los números reales	8
Axiomas de la adición y la multiplicación	9
Otras operaciones	11
Propiedades	12
Propiedades de la radicación	14
Potencias con exponente irracional	18
Potencia de un número positivo	22
Propiedades	22
Potenciación y la relación ($<$)	22
Resumen del capítulo 1	25
Estructura de los números reales	25
Axiomas de los números reales suma y producto	25
Potenciación	26
Propiedades	26
Radicación	26
Propiedades de la radicación	26
Capítulo 2	
Expresiones algebraicas	27
Objetivos	27
Expresiones algebraicas	28
Polinomios	30

Operaciones	31
Adición de polinomios	31
Sustracción	34
Signos de agrupación	35
Introducción de signos de agrupación	36
Multiplicación de monomios	41
División de monomios	44
De un polinomio por un monomio	44
De un polinomio entre un polinomio	45
Productos notables	49
Factorización	56
Factorización de binomios	57
Binomio de la forma: $a^n - b^n$	59
Binomio de la forma: $a^n + b^n$	62
Trinomio cuadrado perfecto	65
Trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción	67
Trinomio de la forma: $x^2 + bx + c$	69
Trinomio de la forma: $ax^2 + bx + c$	72
Polinomios de cuatro o más términos	73
Cubo perfecto de polinomios	73
Combinación de métodos	74
Mínimo común múltiplo y Máximo divisor común	77
Entre polinomios	77
Fracciones algebraicas	80
Operaciones	81
Adición	82
Multiplicación	82
División	83
Fracciones compuestas	84
Racionalización	88
Recapitulación	94
Resumen del capítulo 2	100
Operación aritmética	100
Factores especiales	100

Operación aritmética	100
Álgebra: fórmulas de productos notables	100
Capítulo 3	
Ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones	101
Objetivos:	101
Ecuaciones, inecuaciones	102
Ecuación e identidad	103
Ecuaciones de primer grado	104
Solución de problemas	112
Determinación de variables	113
Verificación de la solución de un problema	115
Un método para la solución de problemas	118
Ecuaciones cuadráticas	126
Propiedad	126
El Discriminante	129
Propiedades	133
Intervalos	138
Operaciones entre intervalos	139
Inecuaciones con una variable	141
Propiedades de las desigualdades	143
Inecuaciones de primer grado	143
Inecuaciones de segundo grado	144
Inecuaciones con valor absoluto	149
Valor absoluto	149
Propiedades	150
Problemas de aplicación	155
Ecuaciones con dos o mas incógnitas	159
Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas	161
Casos	162
Métodos de solución	165
Ecuaciones lineales con tres incógnitas	174
Sistemas de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas	175
Sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas	176

Solución de sistemas de tres ecuaciones lineales simultáneas con tres incógnitas	177
Solución por Sustitución:	178
Solución por reducción:	179
Solución por determinantes	179
El sistema no sea compatible.	181
Problemas que se resuelven por medio de un sistema de ecuaciones lineales.	186
Resumen del capítulo 3	191
Intervalos	191
Capítulo 4	
Funciones y modelos funcionales	193
Funciones y modelos funcionales	194
Dominio de una función	197
Casos para hallar el dominio de una función	199
Caso I	199
Caso II	201
Restricción del dominio	203
Construcción de funciones	205
Gráfica de una función	210
Función par	216
Función impar	216
Álgebra de funciones	223
Composición de funciones	226
Función inyectiva o uno a uno	229
Definición de función inyectiva	231
Criterio de la línea vertical	232
Criterio de la línea horizontal	232
Función inversa	234
Tipos de funciones	240
Asíntotas verticales y horizontales	245
Transformaciones de funciones	252
Función cuadrática: $y = x^2$	253

Función raíz cuadrada: $y = \sqrt{x}$	253
Función cúbica: $y = x^3$	253
Función raíz cúbica: $y = \sqrt[3]{x}$	253
Función exponencial: $y = a^x$ con $a > 1$	253
Función lineal:	254
Función idéntica:	254
Función constante:	255
Traslaciones verticales y horizontales	256
Traslaciones horizontales	257
Reflexiones verticales y horizontal	259
Contracción y alargamiento vertical	260
Contracción y alargamiento horizontal	261
Valor absoluto de una función	262
Función cuadrática	267
Función exponencial	270
Clasificación de las funciones exponenciales	271
Función exponencial natural	274
Propiedades	275
Logaritmos	275
Propiedades	278
Ecuaciones exponenciales y logarítmicas	285
Problemas	290
Aplicaciones de la función exponencial	294
El número e	294
Función logarítmica	296
Aplicaciones	297
Función logística	299
Funciones hiperbólicas	303
Identidades hiperbólicas	305
Modelos funcionales	309
Resumen del capítulo 4	319
Logaritmos	319
Exponentes	319
Tabla de resumen del capítulo 4	320

Capítulo 5	
Trigonometría plana	323
Ángulos y longitud de arco	324
Tipos de ángulos	326
Ángulo agudo	326
Ángulo recto	326
Ángulo obtuso	326
Ángulo llano	326
Ángulo reflejo	326
Longitud de arco	328
Relación entre grados sexagesimales y radianes	330
Funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera	332
Coordenadas rectangulares	332
Ángulos en posición normal	334
Funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera	334
Signos algebraicos de las funciones	335
Funciones trigonométricas de los ángulos cuadrangulares	336
Triángulos y funciones trigonométricas de 30° , 45° y 90°	337
Identidades recíprocas	340
Cálculo de los valores trigonométricos de ángulos de 45° , 30° y 60°	341
Ángulo de 30°	343
Ángulo de 60°	344
Identidades fundamentales	344
Relaciones trigonométricas	347
Resolución de triángulos rectángulos	349
Aplicaciones a los vectores	355
Componentes de un vector	355
Reducciones a funciones de ángulos positivos	357
Ángulo cofinales	357
Funciones del ángulo negativo	357
Gráficas de las funciones trigonométricas	358
Función seno	359
Función coseno	359
Función tangente	360
Función cotangente	360

Función secante	361
Función cosecante	361
Variaciones de las gráficas de seno y coseno	362
Identidades trigonométricas	366
Fórmula de suma y diferencia de dos ángulos	371
Fórmula de la diferencia de seno y coseno	373
Fórmulas de suma y diferencia para la tangente	375
Fórmulas del ángulo doble y del ángulo medio	378
Fórmulas de ángulo doble	378
Fórmula para la tangente del ángulo doble	378
Fórmulas del ángulo medio	382
Identidades del ángulo medio	383
Identidades alternas para la tangente del ángulo medio:	383
Fórmulas de producto y de suma	384
Productos de senos y cosenos	384
Identidades suma y diferencia de senos y cosenos	386
Ley del seno y del coseno	387
Ley de los senos	387
Casos	388
Caso (LLA)	388
Ley de coseno	390
Versión alternativa	392
Aplicaciones	393
Funciones trigonométricas inversas	394
Gráficas de funciones trigonométricas inversas	395
Arc seno	396
Arc coseno	397
Arc tangente	398
Arc cotangente	399
Arc secante	399
Arc cosecante	400
Ecuaciones trigonométricas	400
Resumen del capítulo 5	425
Medición de ángulos	425
Distancia entre dos puntos	425
Ecuación de un círculo	425

Trigonometría del ángulo recto	426
Funciones trigonométricas de ángulos	426
Valores especiales de las funciones trigonométricas	427
Triángulos especiales	427
Identidades fundamentales	427
Identidades de cofunciones	428
Identidades de reducción	428
Fórmulas de reducción	428
Curvas seno y coseno	428
Gráficas de las funciones trigonométricas	429
Fórmulas de suma y resta de ángulos	430
Fórmulas de ángulo doble	430
Fórmulas de ángulo mitad	430
Identidades producto a suma	430
Suma a productos	430
Leyes de los senos y de los cosenos	431
Ley de los senos	431
Ley de los cosenos	431
Gráficas de las funciones trigonométricas inversas	432

Capítulo 6

Geometría analítica bidimensional 433

Geometría analítica bidimensional 434

Plano cartesiano	434
Distancia entre dos puntos	436
Punto medio	442
Pendiente e inclinación de una recta	444

Ecuación de la recta 449

Ecuación de una recta horizontal	450
Ecuación de una recta vertical	451
Ecuación de la recta en forma general	452

Rectas paralelas 454

Rectas perpendiculares	456
Problemas de aplicación	460
Secciones cónicas	467
Circunferencia	468

Parábola	472
Elipse	480
Hipérbola	490
Elementos de la hipérbola	492
Resumen del capítulo 6	499
Distancia entre dos puntos	499
Pendiente m de una recta	499
Forma punto- pendiente de una recta	499
Forma pendiente- intersección de una recta	500
Forma de intersección de una recta	500
Ecuación de una circunferencia	500
Parábolas con vértice en (h,k)	501
Elipses con centro en (h,k) y $a>b>0$	501
Hipérbola con centro en (h,k) y $a>b>0$	502
Capítulo 7	
Geometría euclidiana	503
Antecedentes históricos	504
Términos indefinidos	504
Plano	505
Segmentos de línea	507
Congruencia de segmentos	507
Longitud de un segmento	508
Segmentos proporcionales	508
Concepto de ángulo	512
Congruencia de ángulos	512
Bisectriz de un ángulo	513
Medición de ángulos	513
Tipos de ángulos	515
Clasificación	517
Teorema de Thales	518
Rectas perpendiculares	519
Mediatriz de un segmento	520

Triángulos	521
Clasificación de triángulos	523
Líneas en triángulos	525
Congruencia de triángulos	527
Semejanza de triángulos	530
Teorema de Herón	534
Teorema de Pitágoras	537
Prueba del teorema de Pitágoras	538
Polígonos	542
Área del rectángulo	542
Área del paralelogramo	542
Área del cuadrado	543
Área del triángulo	544
Área del trapecio	546
Área del rombo	546
Área del polígono regular	547
Generalidades de un polígono regular	549
Relaciones entre segmentos y apotemas en algunos polígonos regulares	550
Circunferencia y área del círculo	554
Longitud de arco, áreas de un sector y de un segmento	556
Medición de ángulos y arcos en un círculo	558
Áreas y volúmenes de sólidos	563
Geometría del espacio	563
Ángulo diedro	563
Ángulo poliedro	564
Clasificación de sólidos	565
Área del prisma	571
Volumen del prisma	572
Volumen de la pirámide	578
Área del tronco de pirámide regular	580
Volumen del tronco de pirámide regular	581
Superficie cilíndrica	582
Cilindro circular recto	582
Volumen del cilindro	583
Superficie cónica	584
Área lateral del cono	586

Volumen del cono truncado	588
Revolución de una línea poligonal regular	590
Volumen de la esfera	592
Resumen del capítulo 7	599
Paralelepípedo	599
Prisma	599
Cilindro circular recto	599
Cono circular recto	599
Tronco de un cono circular recto	600
Pirámide	600
Tronco de pirámide	600
Esfera	600
Triángulos semejantes	601
Triángulo	601
Triángulo rectángulo	601
Fórmula de Herón	601
Triángulo equilátero	601
Paralelogramo	601
Trapezio	602
Rectángulo	602
Triángulo	602
Círculo	602
Sector circular	602
Corona	602
Triángulo rectángulo	602
Apéndice A	603
Fraciones parciales	603
Descomposición en fracciones parciales	604
Apéndice B	615
Polinomios enteros	615
Elementos de un polinomio	615
Igualdad de polinomios	616
Adición y Multiplicación	617
Sustracción y División	617
Algoritmo de la división	618

Algo más sobre factorización	621
Teorema del factor	622
División sintética (por coeficientes separados)	622
Ecuaciones de grado "n"	631
Apéndice C	635
Inducción matemática	635
Principio de inducción matemática	636
Desarrollo binomial	642
Teorema del binomio	644
Respuestas a algunos ejercicios y problemas	653
Índice temático	709

Breve reseña sobre el contenido del libro

Capítulo I.

El conjunto de los números reales

Se definen los números naturales y se construyen los demás conjuntos numéricos, (enteros, racionales y reales), estos capítulos están complementados con diferentes tipos de aplicaciones. Se incluyen problemas de aplicación relacionados con tasas de interés.

Capítulo II.

Expresiones algebraicas

Se enfatiza en qué conjunto se está trabajando y se construye en principio, con base en los números reales, lo que se conoce como álgebra elemental.

Capítulo III.

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones

Se construye la Teoría de Ecuaciones a partir de las propiedades de los números reales, se presentan los problemas teniendo en cuenta aspectos como: codificación del lenguaje natural al lenguaje simbólico. Descodificación del lenguaje simbólico al lenguaje natural,

Y finalmente, se plantean y resuelven. Se incluyen sistemas de ecuaciones lineales con dos o más incógnitas.

Se hace un desarrollo de ecuaciones exponenciales y logarítmicas con variadas aplicaciones. Finalmente se desarrollan inecuaciones de primero y segundo grado. Con valor absoluto, se plantean y resuelven problemas de aplicación.

Se estudia la estructura algebraica, como una copia de la estructura de los números reales, se heredan propiedades de las expresiones algebraicas.

Capítulo IV.

**Funciones y modelos
funcionales**

En este capítulo se hace un desarrollo de funciones, clasificándolas de acuerdo a sus características y se presentan ejemplos sobre modelos funcionales, también se utiliza la transformación de funciones para graficarlas; a partir de estos se construyen los modelos matemáticos. (Funciones elementales, función lineal, función cuadrática, función logística etc., con aplicaciones).

Capítulo V.

Trigonometría plana

Se presentan los conceptos básicos de trigonometría a partir de la geometría, y después se dan analíticamente, y se estudian como funciones. Se realizan aplicaciones de triángulos rectángulos y no rectángulos, identidades trigonométricas, ecuaciones trigonométricas y funciones inversas.

Capítulo VI.

Geometría analítica

Se dan las ideas y conceptos básicos de la geometría analítica, y se estudian las principales ecuaciones como son la recta, la circunferencia y las cónicas. Se hace una presentación de estas ecuaciones modelándolas a situaciones de contexto real.

Capítulo VII.

Geometría euclidina

Se presentan términos geométricos indefinidos, algunas construcciones básicas de la geometría euclidiana y teoremas como soportes básicos en la resolución de problemas de tipo geométrico. Se deducen algunas fórmulas de áreas de figuras planas y volumen de algunos sólidos; identificando y trazando prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas.

Apéndices

Como complemento a los capítulos anteriores se desarrollan tres apéndices de temas seleccionados y de rigor matemático que consideramos pertinentes y útiles en el abordaje de conceptos previos al cálculo; los cuales pueden ser opcionales, de acuerdo los programas dados.

Apéndice A. Fracciones parciales

Apéndice B. Polinomios enteros

Apéndice C. Inducción matemática

1

El conjunto de los números reales

Objetivos

- Identificar y comprender las propiedades, operaciones y relaciones en cada uno de los conjuntos numéricos.
- Realizar operaciones de suma, producto, división, potenciación y radicación de números reales.
- Utilizar las propiedades y las operaciones en los conjuntos numéricos para simplificar expresiones aritméticas.
- Identificar los axiomas de orden y utilizarlos para demostrar algunas propiedades.

El conjunto de los números naturales

La actividad práctica de contar es anterior a la aparición de la escritura; por ejemplo, para saber si un rebaño estaba completo se asociaba cada oveja con una piedra, en el montón de piedras había tantas piedras como ovejas; para verificar posteriormente, si el rebaño estaba completo, se hacía el proceso inverso; si sobraban piedras, hacían falta ovejas; si sobraban ovejas, era posible que de otro rebaño se hubieran introducido sin darse cuenta; si coincidían, estaban completas; implícitamente se estaba comparando el número de piedras con el número de ovejas.

Pues bien, este proceso se ha ido decantando con la aparición de la escritura y se van creando en las diferentes culturas símbolos para representar los diferentes numerales. Cuando las necesidades son mayores, como contar y representar cantidades grandes, se mejora la simbología hasta obtener los sistemas de numeración posicional cuyas representaciones más adoptadas son el **decimal**, el **binario**, el **octal** y el **hexadecimal**.

El desarrollo y evolución de las actividades diarias del hombre, lo conlleva a hacer intercambios comerciales, entre otras, y lo obliga, a efectuar operaciones con los números como adición, sustracción, multiplicación y división; esto induce a encontrar algoritmos para simplificar los cálculos y a un estudio sistemático de las propiedades.

Esto se sintetiza en los sistemas de números, en principio el sistema de los números naturales.

El sistema de numeración usual para la representación de números naturales es el decimal; los avances tecnológicos requieren otros sistemas de numeración como el **binario**, el **octal** y el **hexadecimal**.

En el sistema de numeración decimal, el proceso de contar se **comienza** con el uno (1). Una vez escogido el número 1, se halla el sucesor de este:

$1 + 1 = 2$; el sucesor de 2; $2 + 1 = 3$, y así sucesivamente se obtiene el conjunto de los números naturales.

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$$

En general, dado un número natural cualesquiera a , podemos **hallar siempre** su sucesor $a+1$; dos números naturales a y b tienen **el mismo sucesor**, si y solo si son **iguales**; es decir:

Otros títulos de interés:

- **Estadística y Muestreo,**
Ciro Martínez Bencardino.
- **Matemáticas Financieras Aplicadas,**
Jhonny de Jesús Meza.
- **Estadística Básica Aplicada,**
Ciro Matínez Bencardino.
- **Solucionario de Baldor,**
Diego Henry Sánchez.
- **Fundamentos de Cálculo,**
Francisco Soler Fajardo,
Reinaldo Núñez y
Moisés Aranda Silva.
- **Álgebra Lineal y Programación Lineal,**
Francisco Soler Fajardo,
Fabio Molina Focazzio y
Lucio Rojas Cortés.

Matemáticas conceptos previos al cálculo

Aplicaciones a ingeniería
y ciencias económicas



El presente texto con aplicaciones a ingeniería y ciencias económicas es el resultado de la experiencia y trayectoria de los autores en el trabajo de las matemáticas en relación con los temas que involucran conceptos previos al cálculo. El texto tiene un enfoque metodológico que estimula la autonomía en el aprendizaje, la cual se requiere como soporte fundamental en el proceso autodidacta. Se compone de siete capítulos y tres apéndices; los temas en los capítulos son explícitos con un desarrollo lógico y secuencial, con un gran número de ejemplos seleccionados y su teoría respectiva, sin sacrificar el rigor que se requiere en los conceptos básicos.

Los temas que se presentan en los capítulos son:

El conjunto de los números reales
Expresiones algebraicas
Ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones
Funciones y modelos funcionales
Trigonometría plana
Geometría analítica
Geometría euclidiana.

Como complemento a los capítulos anteriores se desarrollan tres apéndices de temas seleccionados y de rigor matemático que se consideran pertinentes y útiles en el abordaje de conceptos previos al cálculo; los cuales pueden ser opcionales, de acuerdo a los programas de asignatura.

Apéndice A. Fracciones parciales
Apéndice B. Polinomios enteros
Apéndice C. Inducción matemática

Área: Ciencias Exactas
Colección: Matemáticas

ECOE
EDICIONES

www.ecoediciones.com

