

# Didáctica de las Matemáticas

De preescolar a secundaria



ECOE EDICIONES

Róbinson Castro Puche  
Rubby Castro Puche

### **Robinson Castro Puche**

Licenciado en Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. Master of Arts Mathematics Education, Ball State University, Muncie, Indiana, USA.

En la Universidad de Córdoba, en Montería, ejerció las funciones de secretario académico de la Facultad de Ciencias, director de la Oficina de Registro y Admisiones, director del Departamento de Matemáticas y profesor titular. También fue rector del Colegio El Carmen de Cotorra, Córdoba y entre diciembre de 1993 y noviembre de 1994, fue docente adscrito a la Universidad Nacional de Colombia.

### **Rubby Castro Puche**

Licenciada en Filosofía, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. Magíster en Docencia, Universidad de La Salle, Bogotá. Especialista en Administración Educativa, Universidad San Buenaventura, Medellín. Especialista en Diseño de Textos Escolares, Universidad Externado de Colombia, Bogotá. Coordinadora Diplomado en Docencia Universitaria, Universidad de Córdoba, Montería. Docente de tiempo completo, adscrita al Departamento de Artes y Humanidades, Universidad de Córdoba, Montería.

DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS  
(De preescolar a secundaria)

RÓBINSON CASTRO PUCHE

RUBBY CASTRO PUCHE

# Índice general

<b>LOS AUTORES</b>	<b>v</b>
<b>PRESENTACIÓN</b>	<b>vii</b>
<b>PREFACIO</b>	<b>ix</b>
<b>1. FUNDAMENTOS PSICOLÓGICOS</b>	<b>3</b>
1.1. El conductismo de Watson . . . . .	4
1.2. La teoría histórico-genética de Piaget . . . . .	8
1.2.1. Períodos del desarrollo cognitivo . . . . .	13
1.3. La construcción del conocimiento matemático . . . . .	16
1.3.1. Los procesos del aprendizaje . . . . .	17
1.4. El constructivismo social de Vygotsky . . . . .	20
1.5. Preparación prenumérica . . . . .	22
1.5.1. La clasificación . . . . .	22
1.5.2. Relaciones entre conjuntos . . . . .	23
1.5.3. Conservación de la cantidad . . . . .	25
1.5.4. Los conceptos de correspondencia y orden . . . . .	26
1.6. Modelos matemáticos constructivistas . . . . .	29
1.7. Algunos ejemplos . . . . .	36
1.8. La formulación de problemas . . . . .	39
<b>2. LOS ESTÁNDARES DE VALORACIÓN</b>	<b>45</b>
2.1. Indicadores de valoración del aprendizaje . . . . .	47
2.2. La evaluación . . . . .	54

2.3.	Las pruebas objetivas . . . . .	56
2.4.	La calificación . . . . .	59
2.5.	Los estándares curriculares . . . . .	60
2.5.1.	Estándares curriculares de preescolar a cuarto grado . .	62
2.5.2.	Los estándares de quinto a octavo . . . . .	64
<b>3.</b>	<b>EL CONCEPTO DE NÚMERO</b>	<b>69</b>
3.1.	El sentido numérico . . . . .	69
3.2.	La forma polinómica de los naturales . . . . .	75
<b>4.</b>	<b>ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN</b>	<b>81</b>
4.1.	Preparación psicológica . . . . .	81
4.2.	Significado de las operaciones . . . . .	82
4.3.	Preparación para la suma . . . . .	85
4.4.	La propiedad asociativa de la adición . . . . .	89
4.5.	La propiedad conmutativa de la adición . . . . .	91
4.6.	La diferencia . . . . .	97
4.7.	El algoritmo de la resta . . . . .	101
<b>5.</b>	<b>EL PRODUCTO Y LA DIVISIÓN</b>	<b>103</b>
5.1.	Clases de productos . . . . .	103
5.2.	La propiedad conmutativa del producto . . . . .	107
5.3.	La propiedad asociativa del producto . . . . .	109
5.4.	La propiedad distributiva . . . . .	109
5.5.	La tabla de multiplicar . . . . .	111
5.5.1.	El cero y el uno usados como factores . . . . .	113
5.6.	El algoritmo de la multiplicación . . . . .	114
5.7.	Medición . . . . .	116
5.8.	La división . . . . .	120
5.9.	La división como el inverso de la multiplicación . . . . .	124
5.10.	La división como una sustracción repetida . . . . .	125
<b>6.</b>	<b>EL MATERIAL DIDÁCTICO</b>	<b>129</b>
6.1.	La balanza matemática . . . . .	129
6.2.	El minicomputador de Papy . . . . .	133
6.2.1.	El minicomputador. La suma . . . . .	135
6.2.2.	El minicomputador. La resta . . . . .	139
6.2.3.	El minicomputador. El producto . . . . .	140

6.2.4. El minicomputador. La división . . . . .	142
6.3. El duplo, una forma de multiplicar . . . . .	144
6.4. El método de Peasant . . . . .	145
<b>7. LOS NÚMEROS RACIONALES</b>	<b>147</b>
7.1. Modelos para representar los racionales . . . . .	147
7.2. El significado de número fraccionario . . . . .	152
7.3. Fracciones equivalentes . . . . .	155
<b>8. OPERACIONES CON LOS RACIONALES</b>	<b>159</b>
8.1. Adición y sustracción . . . . .	160
8.2. El mínimo común múltiplo . . . . .	164
8.3. El algoritmo . . . . .	165
8.4. Los números mixtos . . . . .	166
8.5. El producto . . . . .	167
8.6. La división . . . . .	169
8.7. Propiedades de las operaciones . . . . .	172
8.8. Fracciones decimales . . . . .	175
8.8.1. Operaciones con decimales . . . . .	178
8.9. Razones, proporciones, porcentaje . . . . .	179
8.9.1. Actividades para desarrollar el concepto de proporcionalidad . . . . .	182
8.9.2. Propiedades de las proporciones . . . . .	185
8.9.3. Porcentaje . . . . .	188
8.9.4. Regla de tres y repartición proporcional . . . . .	190
<b>9. TEORÍA DE NÚMEROS</b>	<b>195</b>
9.1. Potenciación . . . . .	198
9.2. Operaciones con las potencias . . . . .	200
9.3. El concepto de raíz . . . . .	201
9.4. Raíces de orden superior . . . . .	209
<b>10. SISTEMAS DE NUMERACIÓN</b>	<b>213</b>
10.1. Cambio de bases . . . . .	215
10.2. Operaciones en base cualquiera . . . . .	217

<b>11. HACIA EL ÁLGEBRA</b>	<b>223</b>
11.1. Los números enteros . . . . .	224
11.1.1. Un modelo matemático para jugar fútbol . . . . .	225
11.2. Operaciones con los enteros . . . . .	228
11.3. Los números racionales . . . . .	237
11.4. Los números irracionales . . . . .	238
11.5. Los números reales . . . . .	240
11.6. Redondeo de cifras decimales . . . . .	241
11.7. El razonamiento lógico . . . . .	243
11.7.1. Las actividades . . . . .	245
11.7.2. Patrones numéricos . . . . .	246
11.7.3. Modelos para la formulación de problemas . . . . .	253
11.7.4. El pensamiento geométrico . . . . .	262
11.7.5. Actividades geométricas . . . . .	264

# PREFACIO

*En la medida en que el maestro  
aprenda a pensar como lo hacen  
los estudiantes, su labor será  
más fructífera.*

*Róbinson Castro P.*

En el mundo actual, dominado por la tecnología y el cambio acelerado, el razonamiento matemático se ha vuelto imprescindible para el estudio de las ciencias en general. Razonar matemáticamente va más allá del simple cálculo. Involucra la habilidad de interpretar y resolver problemas, conocer las magnitudes y sus relaciones con las cantidades reales, las propiedades de las operaciones, la habilidad de interpretar los fenómenos y traducirlos al lenguaje de la matemática. Incluye también el sentido espacial, esto es, estar familiarizado con las figuras geométricas y las relaciones entre ellas.

Investigaciones en el campo de la educación han conducido a adquirir una nueva visión de cómo se aprenden los conceptos de número, fracciones, geometría y en general la inferencia lógica, base del desarrollo matemático formal. Por otra parte, la invasión de la tecnología ha relegado a un plano secundario la realización de los cálculos largos y complicados de años pasados, cuando estos se hacían usando solo papel y lápiz.

Si bien es cierto que todo estudiante debe dominar los fundamentos de las operaciones, que le permitan realizar cálculos mentales, estimaciones y otros aspectos relacionados, obtener la raíz cuadrada de un número de ocho dígitos es sencillamente una forma obsoleta de perder el tiempo, cuando se tiene una calculadora que lo hace en pocos segundos. Lo importante es comprender que:

$$\sqrt{a} = b, \text{ si y solamente si } b^2 = a.$$

Las calculadoras y el computador proveen de ayuda instruccional valiosa para la adquisición de conocimiento significativo, tal como el desarrollo polinómico de los enteros, la relación entre los fraccionarios y los decimales y la notación científica o exponencial. Contrario a la creencia de que estos aparatos atroflan la inteligencia, estudios al respecto muestran que son una herramienta pedagógica excepcional.

La tecnología ha cambiado los métodos de enseñanza. Esto es especialmente obvio en los grados superiores. Los gráficos estadísticos son ahora fáciles de dibujar usando software sencillo. En síntesis, la tecnología ha abierto caminos intransitables en el pasado.

Aprender es un proceso activo en el cual el aprendiz selecciona información y la elabora para extender o corregir estructuras cognitivas previas. Es ir hacia experiencias más eficaces que se aplican a condiciones cada vez más complejas; es pasar de estructuras incipientes a estructuras mejor acabadas. Enseñar, por tanto, no es solo transmitir conocimientos a quien no los posee; es un proceso de cambio de una organización conceptual simple a una más elaborada.

Nadie llega al conocimiento con la mente en blanco. Antes de recibir instrucción formal los alumnos han tenido la oportunidad de formarse ideas propias o preconceptos acerca de cómo funciona la naturaleza y han obtenido conclusiones con sentido lógico pero que pueden no estar ajustadas a la teoría aceptada.

Los preconceptos son habilidades y marcos de referencia que dotan de la capacidad para ir aprendiendo. Son las herramientas que permiten la labor de asimilación y ordenación de experiencias posteriores más complejas. Tienen el carácter de instrumentos y están ligados a la estructura de cada ciencia.

Pero los preconceptos en ocasiones pueden ser tan persistentes que dificultan la labor de acomodación. En un estudio se pidió a varias personas leer un texto que decía: *La rotación de la Tierra no genera gravedad*. Luego les preguntaron si los objetos caerían, suponiendo que la Tierra dejara de rotar. Una buena parte de los encuestados respondieron que no, a pesar del texto que acababan de leer.

Un resultado importante del anterior estudio, trasladado al aula, es que las oraciones negativas no son útiles para efectuar el cambio conceptual e incluso pueden reforzar los preconceptos ya que, como en el caso mencionado, se puede relacionar la rotación con la gravedad, olvidando que esta era una negación. Para ayudar a los estudiantes a desechar sus preconceptos y adoptar los conceptos correctos es indispensable mostrar los hechos en lugar de solo

narrarlos, y sobre todo mostrarlos de manera que entren en conflicto los preconceptos con la realidad experimental.

Una visión panorámica muestra que hoy la enseñanza de las matemáticas revela la controversia entre el modelo reproducciónista y la propuesta constructivista. Esta concibe la educación matemática como una acción sobre el pensamiento, que requiere explorar los preconceptos del aprendiz, los referentes culturales y las exigencias locales, nacionales e internacionales, en un intento por aproximar el contexto y las demandas lógicas de este saber con las demandas de pensamiento de los sujetos sometidos a procesos de aprendizaje matemático.

En lo referente a propiciar la solución de problemas del entorno como estrategia para aprender matemática, el maestro debe explicitar la interacción entre conocimiento específico y procesos reales. Por esta razón, la interacción con otras disciplinas debe ser un proceso permanente integrado al proceso educativo, de manera que sea el contacto con la realidad lo que permita al estudiante identificar permanentemente situaciones problemáticas que podrían ser solucionadas desde el saber matemático, mediante sus propias decisiones, con el objeto de encontrar multiplicidad de respuestas al problema planteado. Igualmente, se deben precisar los recursos que se requieren para implementarlas, reflexionar y evaluar para comprender las consecuencias de lo actuado, replantear y revisar estrategias para permitir a quien aprende matemática comunicar, apropiarse de su saber y de la ciencia en general a la cual puede tributar.

Por otro lado, es imposible enseñar lo que no se sabe; por esta razón es imprescindible que el educador conozca en forma integral lo que enseña. La historia de la disciplina muestra cómo se fue afinando la teoría a través de la organización de los conceptos, los cambios producidos, los errores del pasado. Los conceptos que un día fueron tenidos como verdaderos y posteriormente fueron revaluados son una muestra de las concepciones ingenuas de los estudiantes. Situaciones que inducen a concluir en lo inacabado de todo el conocimiento humano.

Para concluir, es indispensable que el docente tenga la claridad suficiente y necesaria acerca de la relación entre el conocimiento y la didáctica, lo cual le permitirá plantear objetivos y contenidos relacionados con el carácter evolutivo, contextual y diverso del pensamiento de los aprendices, sin descuidar los afectivos, estéticos y actitudinales.

En concordancia con lo expresado, en la presente obra se desarrollan once capítulos. En el primero se registran los fundamentos de las teorías psicológicas

de más relevancia en las construcciones pedagógicas para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

En el segundo se aborda la reflexión sobre la valoración del aprendizaje desde el punto de vista de los estándares y su incidencia en el currículo de dicha área. A partir del capítulo tres y hasta el quinto se presentan los conceptos básicos de número y las operaciones aritméticas; en el sexto se describen algunos elementos didácticos, con el propósito de develar sus ventajas pedagógicas.

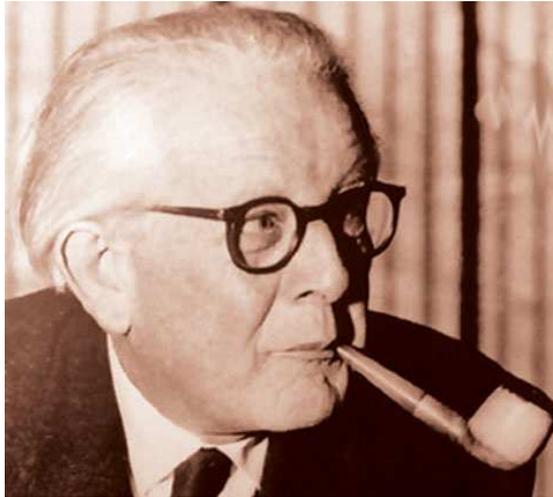
Los capítulos siete a diez versan sobre los racionales positivos y sus operaciones, la teoría de los números y sus diferentes sistemas de escritura. El capítulo once cierra el ciclo de fundamentación matemática básica con la presentación de los enteros, los racionales y los irracionales, concluyendo con una presentación sucinta de los reales. En esta sección se estudian variados ejemplos para mostrar cómo a partir de las relaciones aritméticas entre las cantidades se puede aprender matemática al formular problemas inducidos por estas relaciones. Se finaliza con un estudio de los fundamentos lógicos del aprendizaje de la geometría desarrollado por los educadores holandeses Pierre y Dina van Hiele.

Los autores.  
Montería, julio de 2009

DIDÁCTICA DE LAS  
MATEMÁTICAS  
(De preescolar a secundaria)

# Capítulo 1

## FUNDAMENTOS PSICOLÓGICOS DEL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA



Jean Piaget.

### **Introducción**

A lo largo de la historia de la educación han existido diferentes modelos de enseñanza de la matemática, los cuales han evolucionado a partir del desarrollo de la propia disciplina, de los aportes de la psicología relacionados

con las teorías del aprendizaje, de la sociología, la epistemología y de las teorías pedagógicas; especialmente estas últimas porque a ellas corresponde dilucidar lo referente al método de enseñanza. Un breve recorrido sobre los diferentes modelos educativos matemáticos y los aspectos centrales de su postura cognitiva, muestra el siguiente estado.

Tradicionalmente la matemática ha sido enseñada con el criterio de ser una disciplina casi inasequible para las inteligencias promedio, lo cual está asociado con la poca comprensión de la misma. Los problemas centrales de su didáctica conciernen a las raíces teóricas en que se fundamenta, el carácter deductivo y en gran parte a los procedimientos de su trasmisión. En muchas ocasiones los programas educativos y métodos usados en las escuelas son conductistas y tienen en común una total desatención por desarrollar en sus aprendices un pensamiento matemático auténtico; esto se debe a que se omite o se trata oblicuamente la cercanía de este saber con el contexto cultural del aprendiz, y con las vivencias cotidianas, así como el escrutinio crítico, la revisión continua y el análisis holístico del proceso de su aprendizaje y enseñanza.

Desde esta perspectiva, una investigación y un análisis razonable sobre la formación matemática requiere de la revisión profunda de su epistemología y también de la reflexión sobre otros dos aspectos básicos: cómo se aprenden los conceptos de esta asignatura y la forma de orientar a los profesores desde la pedagogía y la didáctica correspondientes, para que asuman una nueva visión de lo que representa el conocimiento matemático a partir de la lógica de construcción de este saber y el sustento de las teorías psicopedagógicas para generar ambientes adecuados. Ambos factores son determinantes en la enseñanza de la matemática.

Por razones metodológicas iniciamos esta propuesta, cuyo principal objetivo es contribuir a transformar el aprendizaje de la matemática, con una breve revisión de algunas teorías psicológicas que han influido en su enseñanza.

## 1.1. El conductismo de Watson

Al iniciar el siglo pasado los psicólogos norteamericanos, en disidencia con el sentir de los colegas alemanes, elaboraron una nueva teoría relacionada con el comportamiento humano, dicha tendencia la denominaron *Conductismo*, y estaba centrada en la conducta como el único objeto de estudio posible de observar y medir en un laboratorio.

### Otros títulos de interés:

Geometría descriptiva  
*Germán Valencia Gaviria*

Diseño geométrico de carreteras  
*James Cárdenas Grisales*

OpenOffice.org2.x. Todo lo que  
necesita saber sobre software libre  
*Carlos Hernán González*

Lógica de programación  
*Efraín M. Oviedo Regino*

Guía práctica de  
dibujo para ingeniería  
*Germán Valencia García*

Ingeniería de métodos  
movimientos y tiempos  
*Luis Carlos Palacios Acero*

Hidráulica de ríos  
y procesos morfológicos  
*Tomás Ochoa*

# Didáctica de las Matemáticas

## De preescolar a secundaria



Didáctica de las matemáticas es una visión constructivista del aprendizaje de las matemáticas cuyos fundamentos son la formulación de problemas en el aprendizaje de las matemáticas de Pólya, la teoría histórico-genética de Piaget y el constructivismo social de Vigotsky.

El aporte principal de los autores consiste en presentar en forma coherente la interrelación entre la didáctica, la psicología y la pedagogía; tres tópicos claves en el proceso que ellos denominan aprendizaje- enseñanza, para resaltar la importancia del primero de los términos mencionados.

Recreando las ideas desarrolladas por G. Pólya; los autores proponen un método novedoso basado en la confección de guías de trabajo, con instrucciones fáciles de seguir, para inducir la construcción del conocimiento matemático.

Por su contenido, su enfoque y las soluciones que presenta esta obra debe ser material de lectura obligatoria para docentes en ejercicio y en formación; y en general para estudiosos e investigadores del tema.

**Colección:** Textos universitarios

**Área:** Educación y Pedagogía

**ECOE**  
EDICIONES

[www.ecoediciones.com](http://www.ecoediciones.com)

